

수치해석

2020년도 국가공무원 5급(기술) 공개경쟁채용 제2차시험

응시번호 :                      성명 :

제 1 문. 실수 전체의 집합에서 함수  $f(x)$ 의 3계도함수가 연속이라 하자. 또한 실수 전체의 집합에서  $|f'''(x)|$ 이 유계이고  $|f'''(x)|$ 의 최댓값이  $M$ 이라 하자.  $f(x)$ 의 함숫값이 다음 표와 같이 주어져 있다.

$x$	0.8	1.2
$f(x)$	0.7	1.5

$f'(1)$ 의 근삿값을 공식  $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ 와 위의 표를 이용하여

구하고, 이때의 오차 한계를  $M$ 을 이용하여 나타내시오. (8점)

제 2 문. 다음 행렬  $A$ 에 대하여 물음에 답하시오. (총 14점)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 행렬  $A$ 의 역행렬  $A^{-1}$ 을 구하시오. (4점)
- 조건수(condition number)  $\kappa_{\infty}(A)$ 를 구하시오. (단, 조건수의 계산에서 벡터  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 의 노름은  $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_i| : i = 1, 2, 3, 4\}$ 를 사용하고, 행렬  $A = [a_{ij}]$ 의 노름은  $\|A\|_{\infty} = \max\left\{\sum_{j=1}^4 |a_{ij}| : i = 1, 2, 3, 4\right\}$ 를 사용한다) (4점)
- $\|b\|_{\infty} = 2$ 인 벡터  $b$ 에 대하여 연립방정식  $Ax = b$ 의 해를  $x$ 라 하고, 벡터  $\hat{b} = b + [0, 0, 0, 2^{-5}]^T$ 에 대하여 연립방정식  $A\hat{x} = \hat{b}$ 의 해를  $\hat{x}$ 이라 하자. 2)에서 계산한 조건수를 이용하여  $\frac{\|\hat{x} - x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$ 이  $\frac{1}{2}$ 이하임을 보이시오. (6점)

제 3 문. 다음 경계값 문제의 근사해를 구하려고 한다.

$$\begin{cases} -y'' = \sin(8\pi x^2), & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

구간  $[0,1]$ 을  $n$ 등분하여 얻은 격자점들을  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $0 \leq i \leq n$ )라고 하자. 또한, 각 격자점  $x_i$ 에서의 근사해를  $y_i$ 라고 하자.  $n = 4$ 일 때, 이계 미분을 근사하는 3점중앙유한차분(three-point central finite difference)을 위에 기술한 경계값 문제에 적용하여 근사해  $y_1, y_2, y_3$ 을 구하시오. (12점)

제 4 문.  $x$ 축 위에 서로 다른 좌표  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이 주어져 있다. 이 좌표에 대하여 아래의 조건을 만족하는  $n-1$ 차 다항식을  $L_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )라고 하자. 다음 물음에 답하시오. (총 16점)

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

- 1) 각  $i = 1, \dots, n$ 에 대하여, 다항식  $L_i(x)$ 가 유일하게 존재함을 보이시오. (6점)
- 2) 1)의 결과를 이용하여 다음 행렬  $V$ 의 역행렬이 존재함을 보이시오. (10점)

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$