

수치해석

2014년 시행 5급(기술) 공채 제2차시험

응시번호 :

성명 :

제 1 문. 방정식 $x^3 - 16x + 3 = 0$ 의 실근의 근사값을 구하기 위해 이분법(bisection method)과 고정점 반복법(fixed point iterative method)을 사용하려고 한다. 다음 물음에 답하시오. (총 15점)

- 1) 주어진 방정식의 실근이 개구간(0,1)에 존재함을 보이시오. (3점)
- 2) 개구간(0,1)에 존재하는 실근을 근사하기 위하여, $g(x) = \frac{x^3 + 3}{16}$ 로 정의된 함수 $g(x)$ 에 대한 고정점 반복법 $x_{n+1} = g(x_n)$ ($0 < x_0 < 1, n = 0, 1, 2, \dots$)에 의한 수열 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 이 실근에 수렴함을 보이시오. (6점)
- 3) 이분법보다 위 2)의 고정점 반복법이 더 빠르게 수렴함을 보이시오. (6점)

제 2 문. 반복법을 이용하여 $Ax = b$ 형태의 선형연립방정식의 해를 구하려고 한다. 이를 위하여 방정식 $Ax = b$ 를 적절히 선택된 역행렬 Q^{-1} 를 이용하여 $x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$ 로 변형하고, 이 변형식을 이용하여 아래와 같은 반복식을 정의하자. (총 10점)

$$x^{(k)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

다음 물음에 답하시오.

- 1) 변형식 $x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$ 가 $Ax = b$ 와 동치임을 보이시오. (4점)
- 2) Richardson 반복법, Jacobi 반복법, Gauss-Seidel 반복법 각각을 적절한 Q 를 선택하여 설명하시오. (6점)

제 3 문. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 와 초기 벡터 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 에 대하여 아래에 기술한 Power Method를 적용하여 수열 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 과 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 을 계산하려고 한다. 다음 물음에 답하시오. (총 15점)

$$x_n = \frac{Ax_{n-1}}{\|Ax_{n-1}\|_{\infty}}, \quad r_n = \frac{x_n^T Ax_n}{x_n^T x_n} \quad (n \geq 1)$$

(단, $\|\cdot\|_{\infty}$ 는 Euclidean l_{∞} -norm 이다.)

- 1) 모든 정수 $n \geq 1$ 에 대하여 $x_n = \frac{A^n x_0}{\|A^n x_0\|_{\infty}}$ 가 성립함을 보이시오. (5점)
- 2) 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 이 존재함을 보이고, 이들 극한을 구하시오. (10점)

제 4 문. 일계 미분방정식 $x'(t) = -x(t)$ 는 임의의 초기값 $x(0) = x_0 \in R$ 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$ 인 안정성을 갖고 있다. 이 미분방정식의 수치해를 구하기 위해 아래와 같은 여러 가지의 차분식들을 만들었을 때, 이들이 수치적 안정성 (임의의 초기값 $x^{(0)} \in R$ 에 대해 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{(n)}| = 0$)을 갖기 위한 양수 Δt 의 조건을 각각의 경우에 구하시오. (총 10점)

- 1) $\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\Delta t} = -x^{(n)}$ (Forward Euler) (2점)
- 2) $\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\Delta t} = -x^{(n+1)}$ (Backward Euler) (3점)
- 3) $\frac{x^{(n+2)} - x^{(n)}}{2\Delta t} = -x^{(n+1)}$ (Mid-point) (5점)

안전행정부 시험출제과장